Křivky

Cassiniovy křivky, lemniskáta

Křivky nesou jméno francouzského matematika a astronoma Jeana Dominiquea Cassiniho (1625–1712) a jsou definovány jako množina bodů X v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (ohnisek) konstantní součin vzdáleností:

$$|XF_1| \cdot |XF_2| = a^2$$

Cassini se domníval, že po jedné z těchto křivek obíhá Země kolem Slunce.

Umístíme-li ohniska do soustavy souřadnic tak, že $F_1 = [-c, 0]$, $F_2 = [c, 0]$, $c > 0$ je rovnice Cassiniovy křivky:

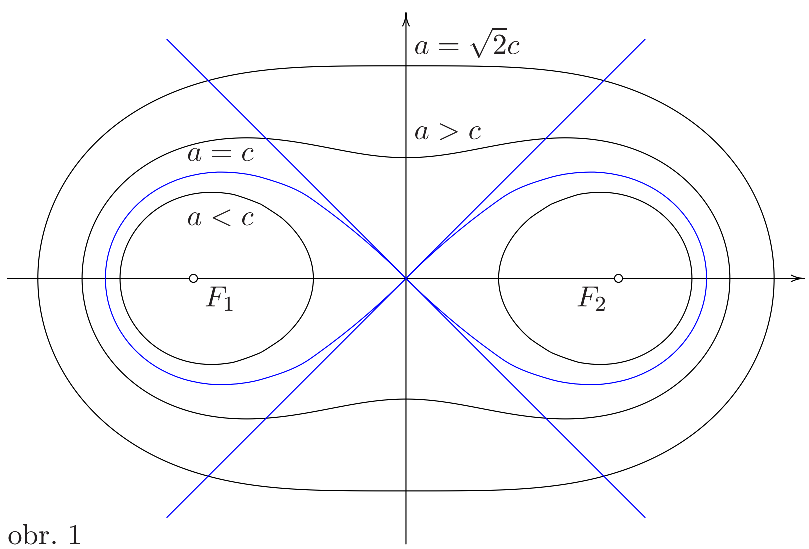
$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = a^4 - c^4.$$

Podle vztahu mezi čísly a, c dostáváme různé tvary křivek. Je-li $a < c$, vyjdou dvě křivky obemykající ohniska (viz obr. 1). Pro $a = c$ dostáváme křivku, která má své vlastní jméno - **lemniskáta** (z řeckého (lemniskos = smyčka, na obrázku modře). V polárních souřadnicích ϱ, φ je lemniskáta popsaná jednoduchou rovnicí:

$$\varrho^2 = 2c^2 \cos(2\varphi).$$

Lemniskátu vykreslují křidélka letící mouchy, přibližně ji opisují meandrující řeky, oblouky lemniskáty najdeme rovněž u železničních přechodnic.

Jestliže $a > c$, Cassiniova křivka už sama sebe neprotíná, ale může být ještě „prohnutá“. Pro $a \geq \sqrt{2}c$ prohnutí mizí a Cassiniova křivka se podobá elipse.



obr. 1

Descartesův list

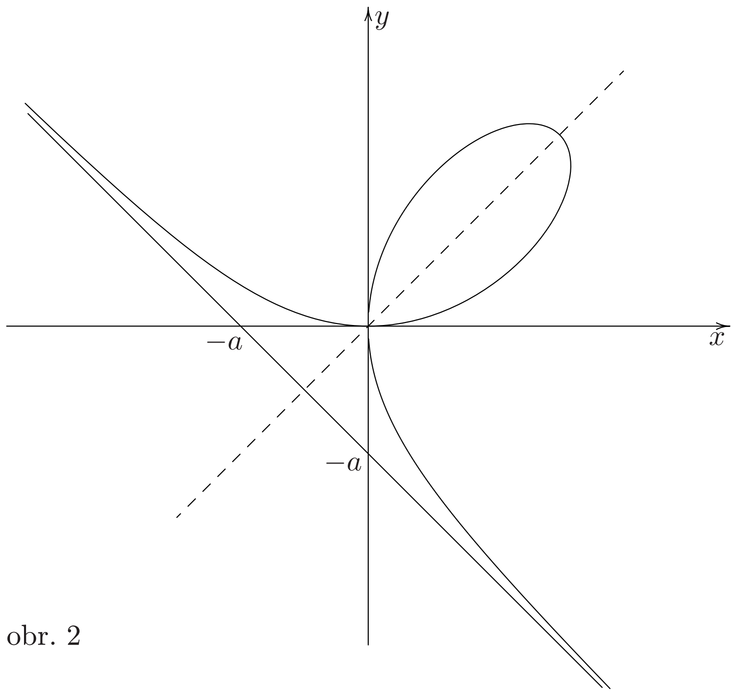
Descartesův list (René Descartes 1596–1650, francouzský filosof a matematik) je vyjádřen rovnicí:

$$x^3 + y^3 = 3\,axy,$$

kde $a \neq 0$, ale může být kladné i záporné. Jedno z možných parametrických vyjádření křivky je:

$$x = \frac{3\,at}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3\,at^2}{1 + t^3} \qquad t \in (-\infty, \infty),\ t \neq -1.$$

Na obrázku 2 je Descartesův list pro $a > 0$. Pro $a < 0$ bychom dostali křivku osově souměrnou podle přímky $y = -x$ s křivkou z obr. 2.



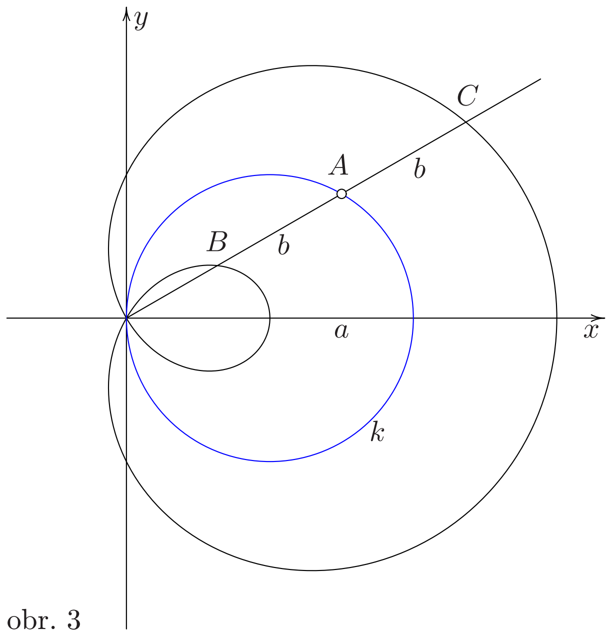
obr. 2

Malá poznámka: Descartes byl nepochybně velký matematik a filosof, ale s jeho názory na chování a cítění zvířat těžko lze souhlasit. Tvrdil, že zvířata jsou stroje. Když biješ psa, řve; nedomnívej se však, že cítí bolest; nemá žádné vědomí a jeho nářek je čistě mechanický reflex.

Pascalova závitnice

Křivka je pojmenovaná podle velkého francouzského matematika, fyzika a filosofa 17. století Blaise Pascala (1623 -1662).

Jak ji dostaneme. Ve zvolené soustavě souřadnic sestrojíme kružnici k (nazývá se řídící) o poloměru $r = a$, která prochází počátkem a střed má na ose x. Z počátku vedeme polopřímku tak, aby protnula kružnici, průsečík označíme A. Na polopřímku naneseme na obě strany od bodu A vzdálenost b a získáme body C, B. Množina všech takto sestrojených bodů je **Pascalova závitnice**. Rovnice řídící kružnice v polárních souřadnicích je $\varrho = 2a \cos\varphi$, takže závitnice má v polárních souřadnicích rovnici: $\varrho = 2a \cos\varphi \pm b$, kde $a,\ b$ jsou zvolené nebo zadané parametry.



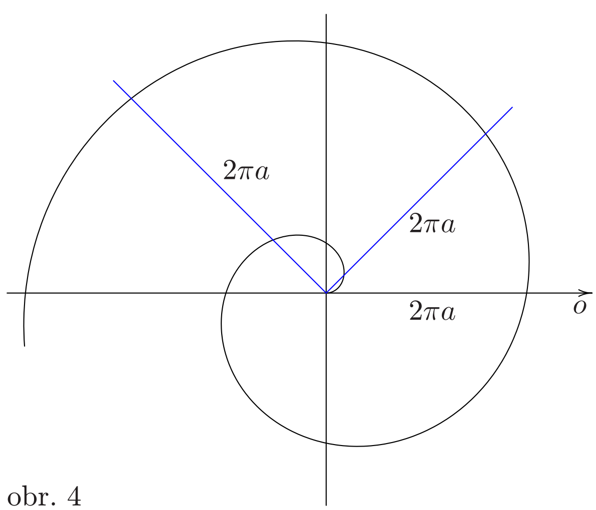
obr. 3

Spirály

Spirála je rovinná křivka, kterou opisuje bod P na přímce p otáčející se kolem pevného bodu $O \in p$, přičemž vzdálenost $|OP| = \varrho$ se zadaným způsobem mění. Povíme si o třech spirálách: Archimedově, hyperbolické a logaritmické.

Přemluvíme-li mravence, aby ťapal stálou rychlostí po rovnoměrně se otáčejícím kotouči od středu kotouče ve směru poloměru, bude opisovat první ze spirál **Archimédovu**. Jinými slovy; vyjádřeno v polárních souřadnicích délka průvodiče bodu spirály roste lineárně s argumentem (tj. úhlem otočení):

$$\varrho = a\,\varphi, \quad a > 0, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

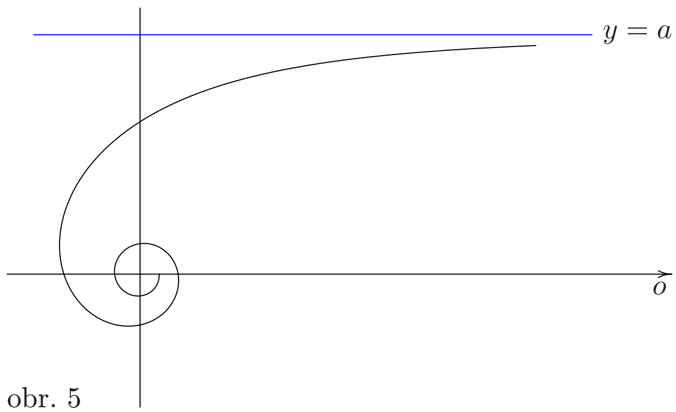


obr. 4

Body dvou sousedních závitů na stejném paprsku jsou od sebe vzdáleny o $2\pi a$. Části dvou protichůdných Archimedových spirál tvoří obrys součástky, která umožňuje převést otáčivý pohyb na posuvný tam a zpět (vačka).

Zatímco u Archimédovy spirály je průvodič přímo úměrný argumentu, u **hyperbolické spirály** je tomu naopak; průvodič bodu spirály je nepřímo úměrný jeho argumentu. Rovnice spirály v polárních souřadnicích je

$$\varrho = \frac{a}{\varphi}, \quad a > 0, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

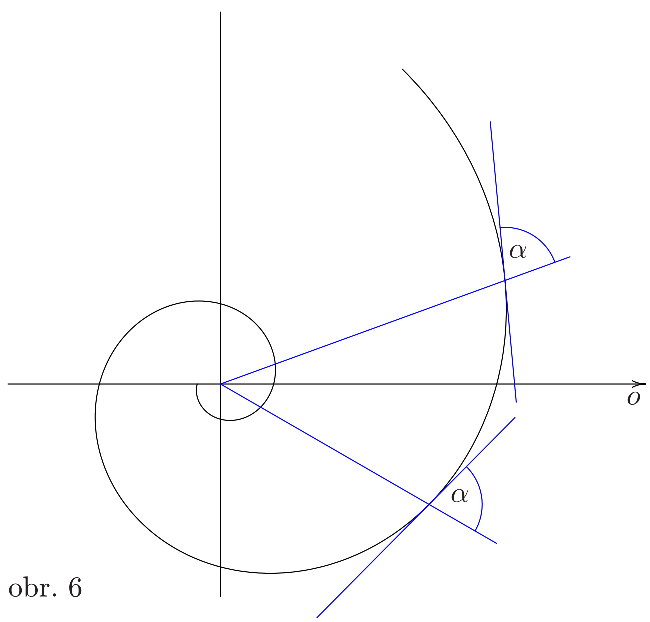


obr. 5

Spirála má zajímavé asymptotické chování: pro $\varphi \to 0$ se body spirály blíží k přímce $y = a$, pro $\varphi \to \infty$ se délka průvodiče bodů blíží k nule.

Třetí spirála, kterou zmíníme, je **logaritmická spirála**. Její rovnice v polárních souřadnicích se obvykle uvádí ve tvaru:

$$\varrho = a^{\varphi}, \qquad a > 0,\ a \neq 1, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$



obr. 6

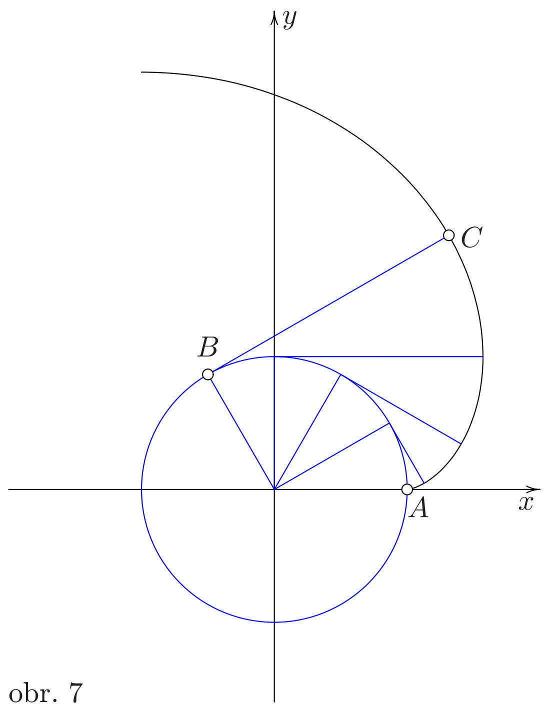
Logaritmická spirála má zajímavou vlastnost (naznačenou na obrázku 6); všechny polopřímky vycházející z počátku protíná pod stejným úhlem (neboli tečna a průvodič v libovolném bodě svírají konstantní úhel). Toho se využívá v technické praxi např. u rotujících nožů, ozubených kol, atd., tvar logaritmické spirály mají rovněž některé jistící pomůcky pro horolezce (tzv. abalaky a friendy).

Evolventa kružnice

Tuto křivku si můžeme představit jako dráhu koncového bodu napnuté niti, odvíjející se z kružnice. (Pokud bychom odvíjeli nit z jiné křivky, dostali bychom evolventu této křivky.) S odvíjením začínáme na kružnici (bod A na obr. 7), napnutá nit má směr tečny ke kružnici. Potom délka oblouku kružnice AB je rovna délce úsečky BC.

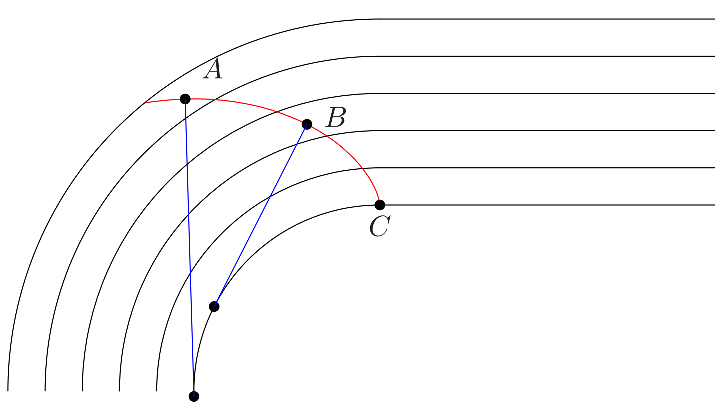
Jestliže střed kružnice umístíme do počátku, pak parametrické rovnice evolventy kružnice jsou:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t + rt\sin t \\ y &= r\sin t - rt\cos t, \end{aligned} \qquad \text{kde } t \in \mathbf{R}, \quad r \text{ je poloměr kružnice.}$$



obr. 7

S evolventou kružnice se můžeme setkat např. na atletickém oválu. Startovní čára totiž není úsečka, ale část evolventy, aby všichni závodníci měli (nebo mohli mít) stejně dlouhou trať.



Závodníci si to namíří po tečně k okraji vnitřní dráhy. Pokud startovní čára (červená křivka) je částí evolventy, mají závodníci A, B, C stejně dlouhou trať.

A nakonec pár obrázků pro radost

A nakonec pár obrázků pro radost. Všechno jsou to (poměrně jednoduše) analyticky vyjádřitelné křivky.